CALCOLO COMBINATORIO E CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Dispensa di Francesca Bardin
A.S. 2006 - 2007

Giochiamo a dadi…

Nel XVII secolo il cavaliere De Meré, forte giocatore, … come spesso accadeva fra la nobiltà di quel tempo, si pose questo quesito:
”Che cosa è più conveniente, scommettere di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado, oppure un doppio 6 lanciando 24 volte due dadi?”

Pensava che le due possibilità dovessero essere indifferenti ragionando (erroneamente!!!) in questo modo:

6 *(possibilità in 1 dado) :* ***4*** *(lanci) =* ***36****(possibilità in 2 dadi) :* ***24*** *(lanci)*

... poi giocava, e perdeva più spesso quando scommetteva sul secondo caso!!
Il cavaliere De Meré rivolse il quesito ad un suo amico, Blaise Pascal, genio matematico dell'epoca...
...che a sua volta scrisse ad un amico, altro genio matematico dell'epoca, Pierre De Fermat.
e insieme diedero vita alla moderna **Teoria delle Probabilità** *...*
……Ecco perché perdeva … !!!
Ottenere un sei lanciando 4 volte un dado è **più probabile** *di un doppio sei lanciando 24 volte due dadi!!!*

Gli Arabi adottarono il passatempo del Legionario "di tirare le ossa" (tirare i dadi) quando si espansero nelle province romane. Si riferivano ai piccoli dadi con la parola "azzahr". Ad un certo momento durante il commercio con gli Europei nel Medio Evo, questo gioco fu adottato dai Francesi al quale si riferivano usando le parole "hasar" o "hasard". Durante le interminabili guerre tra Francia e Inghilterra durante i secoli 13 e 14, i cavalieri Inglesi importarono il gioco che chiamarono "hazard" - che significa scommettere su una probabilità o mettere a rischio (come "nel tentare di indovinare").

1. CALCOLO COMBINATORIO

quante parole di tre lettere possono essere scritte utilizzando solo le cinque vocali? (es.: aoe, iii, uaa...)

Pensiamo di rappresentarle mediante un grafo ad albero.

quante parole di tre lettere possono essere scritte utilizzando solo le cinque vocali, ma senza ripetizione? (es.: aoe, uao, aei, MA NON iii, uaa, eie, ...)

Tracciamo un nuovo grafo ad albero... sarà simile al precedente ma perderà qualche ramo!

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Se una scelta può essere fatta in r modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi, e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte, una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi ecc., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $r \cdot s \cdot t$ ... modi diversi

Definizione:

Una sequenza di n elementi si dice, genericamente, n-upla
(per n=2 si parlerà di "coppia", per n=3 di "terna", per n=4 di "quaterna",
per n=5 di "cinquina", per n=6 di "sestina", per n>6 di "sequenza di 6, 7, 8, ... elementi").

Quando in un'n-upla consideriamo "importante" l'ordine in cui gli elementi si susseguono, parleremo di n-upla "ordinata", e la indicheremo con parentesi tonde: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Quando consideriamo irrilevante l'ordine, parleremo di n-upla "non ordinata" e useremo le graffe: $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

1.1. DISPOSIZIONI

Supponiamo di avere n oggetti distinti (ad es: n palline numerate progressivamente da 1 a n, oppure n lettere dell'alfabeto, ...).

Sia ora k un intero, $k \leq n$.

<u>Le k-uple ORDINATE che si possono costruire utilizzando</u> (senza ripetizione) <u>k fra gli n oggetti dati</u> sono anche dette "le **<u>DISPOSIZIONI SEMPLICI</u>** degli n oggetti dati, presi a k a k" o anche "le disposizioni di classe k, di quegli n oggetti".

Il numero di tali k-uple ordinate (= il numero delle disposizioni di n oggetti, presi a k a k), si indica con $D_{n,k}$ e risulta $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

<u>Le k-uple ORDINATE che si possono costruire utilizzando, con ripetizione, k fra gli n oggetti dati sono dette **DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE**:</u>

$D_{n,k}{}^{r} = n^k$

Esempio 1: Con 10 oggetti distinti, quante quaterne ordinate posso costruire?

Esempio 2: Se ho 10 ragazzi, in quanti modi posso scegliere: un portiere, un arbitro e un raccattapalle?

1.2. PERMUTAZIONI

Le "**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI**" sono tutte le n-uple ordinate costruibili utilizzando, senza ripetizione, quegli oggetti; il numero delle permutazioni di n oggetti si indica col simbolo P_n e dal Principio fondamentale si ha subito: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$

<u>Le permutazioni corrispondono ai modi in cui è possibile permutare l'ordine di n oggetti</u>

Date 5 persone, in quanti modi si possono mettere in coda davanti ad uno sportello?

Che legame c'è tra Disposizioni semplici e permutazioni?

<u>Esercizi</u>

1. In una compagnia di quattro amici (Roberto, Paolo, Enzo, Walter) bisogna scegliere un capo e un vice. In quanti modi può essere effettuata la scelta? Obbligatorio tracciare il diagramma ad albero (per brevità, usare solo le iniziali dei nomi!)

2. Per andare da una città A ad una città B ci sono quattro strade diverse. In quanti modi è possibile "fare un giro" da A fino a B e ritorno? E se al ritorno non si vuole ripercorrere la stessa strada dell'andata? Obbligatorio un diagramma, per ciascuno dei due casi.

3. In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4. Se si effettuano tre estrazioni, quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto dell'ordine con cui vengono estratte le palline? (nel senso che, ad es., l'esito 1-2-3 sarà considerato distinto dall'esito 2-1-3)

4. In un plotone di 25 militari bisogna scegliere:

un addetto alle pulizie;

un addetto alle cucine;

un soldato che monti di sentinella.

In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

5. Quante parole di 5 lettere si possono scrivere utilizzando liberamente le 21 lettere dell'alfabeto italiano, con possibilità di ripetizione di una lettera ma col vincolo di evitare le 'doppie', cioè due (o più) lettere uguali consecutive? (Es. parole ammissibili: atoim, qtatq, eoeoe... Non ammissibili: aggfe, pppio...)

6. Per giocare al totocalcio, com'è noto, bisogna scegliere un pronostico (che può essere 1, X o 2) per ciascuna delle 13 partite sulla schedina. Quante schedine diverse è possibile, teoricamente, compilare?

7. La moglie di un carcerato, per poter parlare col marito anche al di fuori delle ore di colloquio coi parenti, ha concordato con lui un codice basato sull'uso di quattro bandierine: una Italiana, una Francese, una Americana e una del Milan. Un messaggio può consistere nell'esposizione di una singola bandierina, oppure di due, o tre, o tutte e quattro le bandierine. Nel caso il messaggio sia costituito da più bandierine, conta anche l'ordine in cui queste si susseguono da sinistra a destra. Si domanda: quanti messaggi è possibile trasmettere con queste modalità?

8. Sappiamo che in ogni computer, la memoria è costituita da tanti "bit", essendo un "bit" un dispositivo fisico che può assumere due stati differenti (essere magnetizzato o non, essere attraversato da corrente o non).Indicati convenzionalmente con "0" e "1" tali due stati fisici, diremo, in sostanza, che un bit è una "cella" di memoria che può assumere, di volta in volta, o il valore "0" o il valore "1". Una sequenza di 8 bit forma il cosiddetto "byte".
   a) Quante diverse "informazioni" può contenere un byte?
   b) E quante informazioni diverse si potranno memorizzare in una sequenza di 10 bytes?
   c) Tenendo conto che 2^{10} =1024 circa 1000, dai un'approssimazione per difetto del numero trovato.

in una classe di 25 alunni, si devono scegliere 6 "volontari" per un'ora di interrogazioni. In quanti modi può essere effettuata la scelta?

Ragioniamo dapprima sulle sestuple ordinate. Quante sono?

Noi però vogliamo "raggruppare" tutte le sestuple "equivalenti" (cioè, contenenti gli stessi ragazzi, se pure in ordine diverso) per "farne una sola", per "farne un gruppo che verrà contato come un'unica sestupla".

MA DATA UNA SESTUPLA ORDINATA, QUANTE SONO LE SESTUPLE ORDINATE AD ESSA EQUIVALENTI (COMPRESA QUELLA DI PARTENZA)? EVIDENTEMENTE, SONO TANTE QUANTI I MODI CON CUI, DATI 6 OGGETTI, ESSI POSSONO ESSERE ORDINATI (=MESSI IN FILA, O IN CODA)

1.3. COMBINAZIONI SEMPLICI

Le k-uple NON ORDINATE che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) k fra n gli oggetti dati sono anche dette COMBINAZIONI SEMPLICI.

"le **COMBINAZIONI** degli n oggetti dati, presi a k a k" o anche "le combinazioni di classe k, di quegli n oggetti".

Il numero di tali k-uple NON ORDINATE (= il numero delle combinazioni di n oggetti, presi a k a k) si indica con $C_{n,k}$ e risulta $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(Osservazione: l'ultimo passaggio è stato ottenuto moltiplicando sia sopra che sotto per (n-k)! ; tale passaggio è possibile anche per k=n, perchè, **per convenzione, si pone 0 ! =1**)

Con 10 oggetti distinti, quante quaterne non ordinate posso costruire?

I numeri $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ vengono anche detti “coefficienti binomiali” e si indicano con $\binom{n}{k}$.

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ risponde alla domanda: “dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?”

Ricordiamo che stiamo sempre supponendo $k \leq n$.

In particolare, si ha

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ho un insieme di 7 oggetti distinti. In quanti modi posso sceglierne 3?

Con i 90 numeri del lotto, quanti terni posso costruire?

Esercizi

1. Un negozio di abbigliamento dispone di 7 tipi di giacche, 5 tipi di calzoni, 8 tipi di camice e 7 tipi di cravatte. In quanti modi il cliente può scegliere un completo formato da giacca, calzoni, camicia, cravatta?

2. Trovare il numero di modi in cui 6 persone possono mettersi in fila. Quanti sono i modi se due particolari persone vogliono mettersi una dietro l'altra?

3. In quanti modi 5 persone possono sedersi su un divano se ci sono 3 posti disponibili?

4. 7 persone si incontrano ad un ricevimento. Se ciascuna di esse da la mano a tutte le altre una solo volta, quante strette di mano si scambiano?

5. Trovare il numero di parole di 4 lettere (i) che si possono formare con le lettere della parola TROMBA (senza ripetizione). (ii) Quante di queste sono composte da sole consonanti? (iii) Quante cominciano e finiscono con una consonante? (iv)Quante contengono la lettera R? (v) Quante contengono la lettera R e finiscono con una vocale? Quante contengono R e B?

6. Da un cassetto contenente 100 bulloni, 10 dei quali sono difettosi, si preleva una manciata di 6 bulloni. Quante sono le possibili sestine contenenti due pezzi difettosi?

7. In un concorso pronostici per poter realizzare la vincita minima occorre indovinare 10 risultati su 13. (i) quante sono le alternative che consentono di realizzare soltanto la vincita minima? (ii) Quante se occorre individuare i primi 5 pronostici? (iii) Quante se occorre indovinare almeno tre dei primi 5 pronostici?

1) Domani pioverà;
2) L'Italia vincerà i mondiali;
3) Quest'anno verrò promosso;
4) Il 31 dicembre è l'ultimo giorno dell'anno;
5) Quest'anno è bisestile.

Quali di queste frasi esprimono una condizione di incertezza? Quali invece fatti che siamo certi accadranno?

2. GLI EVENTI

Definiamo come **evento il verificarsi di un avvenimento, situazione o fenomeno;** in quest'ottica potremmo intuitivamente definire la probabilità come l'indice di verosimiglianza di tale evento, proponendoci però di darne una definizione più rigorosa in un secondo momento.

In particolare, un evento può essere:

- *Certo*, se, verificatesi alcune condizioni, il suo realizzarsi è stabilito con assoluta certezza (frase 4);
- *Impossibile*, quando, data la realizzazione di alcune condizioni, non potrà mai verificarsi (frase 5);
- *Aleatorio o casuale*, quando, data la realizzazione di alcune condizioni, può verificarsi oppure no (frase 1,2,3).

Dato un evento si definisce:

\- *spazio delle probabilità*, *o degli eventi* **Ω**, l'insieme di tutti i possibili risultati di quell'evento;

Si chiama *evento* ogni sottinsieme $E \subseteq \Omega$, cioè un insieme dei risultati possibili. In relazione allo spazio delle probabilità un evento E si dice:

-*elementare,* se è formato da un solo elemento, $E=\{w\}$ con $w \in \Omega$

-*certo,* se $E=\Omega$ cioè se si verifica con assoluta certezza;

-*impossibile*, se $E=\emptyset$ cioè il suo verificarsi è da escludersi con assoluta certezza.

Ogni evento si può identificare come un insieme.

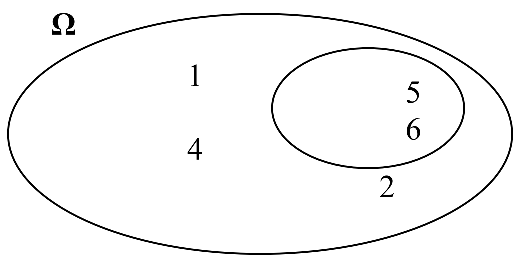
Evidenziamo come ogni evento possa essere rappresentato in tre diversi modi:

- attraverso una proposizione;
- enumerazione dei casi;
- attraverso il diagramma di Eulero-Venn.

<u>**ESEMPIO 1**</u>

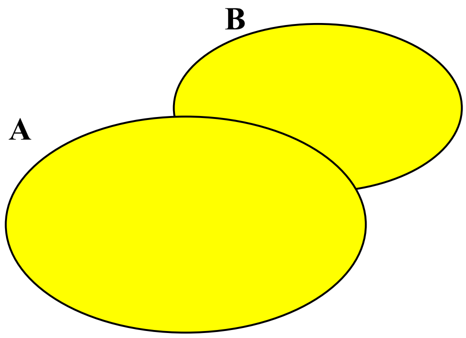
Con riferimento al lancio di un dado,

l'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ è lo spazio degli eventi,
l'insieme A = "esce un numero >4" è equivalente a
A={5,6} o alla seguente rappresentazione:



Inoltre utilizzando le operazioni tra insiemi sugli eventi di Ω, si possono ottenere nuovi eventi di Ω.

Così, dati due eventi A e B si chiama **evento unione di A e B e** si indica con **A U B** l'evento che risulta dal verificarsi degli eventi A o B o di entrambi.



<u>ESEMPIO 2</u>

Con riferimento al lancio di un dado, sia
A="esce un numero >4"
B="esce 4" si ha:
A={5,6}, B={4}, A U B={4,5,6}

Inoltre, dati due eventi A e B si chiama **evento intersezione di A e B** e si indica con **$A \cap B$** l'evento che risulta dal verificarsi di **entrambi** gli eventi A e B.

In particolare se **A e B sono disgiunti** cioè $A \cap B = \varnothing$ A e B si dicono **indipendenti.**

<u>ESEMPIO 3</u>

Con riferimento al lancio di un dado, sia
A="esce un numero <4"
B="esce 2" si ha:
A={1,2,3}, B={2}, $A \cap B = \{2\}$

Dati due eventi A e B si chiama **evento differenza tra A e B** e si indica con **A\B** l'evento che esclude il verificarsi dell'evento B ma non di A.

Dato un evento **A,** si dice **complementare di A** e si indica con **A^c** quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, in particolare $A^c = \Omega \setminus A$.

Quindi,ad esempio $A \setminus B = B^c$.

Inoltre, dato Ω spazio di tutti gli eventi possibili, $\Omega^c = \varnothing$ e viceversa $\varnothing^c = \Omega$

<u>ESEMPIO 4</u>
Con riferimento al lancio di un dado, sia
A="esce un numero <4"
B="esce 2" si ha:
$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2\}$, $A\backslash B=\{1,3\}$ $A^c=\{4,5,6\}$ $B^c=\{1,3,4,5,6\}$

Dati due eventi **A e B**, si dice che **A implica B** e si scrive con $\mathbf{A \subset B}$, quando dal verificarsi di A segue il verificarsi di B.

Si dice che due eventi **A e B**, sono **uguali o equivalenti**, e si scrive **A=B** se A implica B e B implica A.

Esercizi

1. Analizza i seguenti eventi specificando a quale categoria appartengono.
   - estrarre una pallina rossa da un'urna contenente solo palline rosse;
   - estrarre un jack da un mazzo di carte da poker;
   - esce 8 nel lancio di un dado a sei facce;
   - esce testa nel lancio di una moneta.

2. Si consideri un mazzo di carte completo dal quale si estrae a caso una carta. Definire lo spazio degli eventi e rappresentare per elencazione e graficamente gli eventi:
A= "la carta estratta è un asso",
B="la carta estratta è di cuori".
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c, B^c.
Inoltre rispondi, alle seguenti domande giustificando le tue risposte:
   - A e B sono indipendenti?
   - $A \subset B$ o $B \subset A$?
   - $A=B$?

3. Si lancino tre monete da 2€. Definisci lo spazio degli eventi e gli eventi:
A="escono tre teste"
B="esce una testa"

4. In riferimento all'esercizio 3, definisci gli eventi:
C="esce almeno una testa"
D="esce al più una testa"
E="escono al più tre teste"
F="escono almeno tre teste"
Che differenze noti tra gli eventi A,E,F e tra gli eventi B,C,D?
Che significato puoi attribuire ai termini almeno e al più?
Che relazioni intercorrono tra i vari eventi ($=, \subset, \in, \cap, \cup$)?

5. Si consideri il seguente esperimento: si scelgono tre viti prodotte con una certa macchina e si verifica se le viti sono buone o difettose. Ad ogni vite difettosa si attribuisce il simbolo D e ad ogni vite buona il simbolo B. Siano A_1, A_2, A_3 gli eventi così definiti:
$A_1=\{$ la prima vite è difettosa $\}$
$A_2=\{$ la seconda vite è difettosa $\}$
$A_3=\{$ la terza vite è difettosa $\}$
Scrivere la rappresentazione di Ω e degli eventi:
A_1; $A_1 \cup A_3$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; $A_2 \cap A_3$; $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

6. Collega i concetti della logica degli eventi e della teoria degli insiemi tra loro corrispondenti.

Certo Impossibile Implicazione Complementare Evento somma Evento prodotto Evento differenza Indipendenti	Ambiente Vuoto Intersezione Complementare Inclusione Disgiunti Unione Differenza

3. PROBABILITA' DI UN EVENTO

3.1. DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA'

Nell'esempio 4 abbiamo definito l'evento B="esce 2", ma qual è allora la probabilità che tale evento si verifichi?

Poiché il dado non è truccato, non si ha ragione di pensare che un numero possa uscire più facilmente di un altro, i casi possibili sono ugualmente possibili, cioè equiprobabili e quindi P(B)= 1/6. E' facile quindi intuire che per calcolare la probabilità di un evento:

1. si stabilisce qual è lo spazio degli eventi e si determina il numero dei suoi elementi, cioè tutti i casi possibili, tra loro equiprobabili;
2. si determina il numero dei casi *favorevoli* (cioè i casi per i quali l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità risulta verificato);
3. si calcola il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, tale rapporto è una misura della probabilità che ha quell'evento di verificarsi.

Premesso ciò, riportiamo la definizione classica di probabilità (Laplace):

Def. Si chiama probabilità p di un evento il rapporto tra il numero dei risultati favorevoli e il numero dei risultati possibili della prova, nell'ipotesi che siano tutti ugualmente possibili.

Se A è l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità, indichiamo con p=P(A) data da

p=P(A)=f/n

dove f è il numero dei casi favorevoli e n il numero complessivo dei casi possibili.

Osserviamo che:

1. la probabilità é una frazione non negativa con numeratore sempre maggiore del denominatore (infatti $f<n$, in quanto il numero dei casi favorevoli è sempre minore del numero n di tutti i casi possibili, essendo i casi favorevoli inclusi tra quelli possibili), quindi sia un numero razionale compreso tra 0 e 1.
2. *a)* $P(\varnothing) = 0/n = 0$;
   Se non esistono casi favorevoli, l'evento è impossibile e la sua probabilità è nulla,
   b) $P(\Omega) = n/n = 1$;
   Se tutti i casi favorevoli sono possibili,l'evento è certo e la sua probabilità è uguale a 1.
3. *Dati due eventi A,B indipendenti*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dimostrazione: sia $P(A) = f_A / n$ e $P(B) = f_B / n$

Poiché A e B sono indipendenti per ipotesi, questo significa che i casi favorevoli al verificarsi di A sono differenti da quelli favorevoli al verificarsi di B. Di conseguenza, per la definizione di A U B (evento che risulta dal verificarsi di almeno uno dei due eventi), gli eventi favorevoli a quest'ultimo evento sono $f_A + f_B$. Quindi:

$$P(A \cup B) = (f_A + f_B)/n = f_A / n + f_B / n = P(A) + P(B)$$

Questa proprietà è nota come **additività semplice**.

Dalle tre proprietà appena dimostrate se ne deducono altre:

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$, dove A^C è il complementare di A.

   Dimostrazione: visto che dalla definizione di complementare discende che $\Omega = A \cup A^C$,
   (per la proprietà n.2), $P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1$;
   (per la proprietà n.3), $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$;
   (per la proprietà transitiva) $P(A) + P(A^C) = P(\Omega) = 1$;
   da cui si ottiene $P(A^C) = 1 - P(A)$.

2. *Se l'evento A implica l'evento B (cioè $A \subset B$) allora $P(A) < P(B)$*

   Dimostrazione:
   si noti che $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$, quindi *A* e *(B – A)* sono indipendenti;
   (per la proprietà n.3) $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$
   (poiché $P(A) \geq 0$ e $P(B\text{-}A) > 0$) $P(A) + P(B - A) > P(A)$
   quindi $P(B) < P(A)$

CRITICA ALLA CONCEZIONE CLASSICA

La concezione classica si può far risalire ai contributi dello scienziato francese Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665). E' il 1654 quando un accanito giocatore d'azzardo, il conte Chevaliere de Méré pose a Pascal una serie di problemi sui dadi. Pascal risolse facilmente il problema ma continuando a riflettere sull'argomento risolse numerosi altri problemi, legati al gioco d'azzardo, che diedero origine al moderno calcolo delle probabilità. La sistemazione teorica del calcolo delle probabilità è dovuta principalmente a P.S.Laplace (1749-1827), al quale sono da attribuire la definizione della disciplina come *le bons sens reduit a calcul* e la definizione stessa di probabilità secondo la concezione classica. (Si riconosce in questa definizione l'influenza dei giochi di dadi, e di carte). Tuttavia gli sviluppi del calcolo delle probabilità, e le sue applicazioni ad attività commerciali come ad esempio le assicurazioni, fecero vacillare la definizione classica. Quali sono le critiche che gli vennero mosse?

- La caratteristica essenziale della definizione di probabilità è che tutti i casi siano ugualmente possibili(equipossibili). Ma cosa significa ugualmente possibili? Il termine equipossibile può essere usato come sinonimo di equiprobabile quindi nella definizione si utilizza lo stesso concetto che si vuole definire: la definizione è pertanto circolare.
- Per superare tale critica J. Bernoulli aveva introdotto il *principio della ragione non sufficiente.* Secondo tale principio,i casi possibili sono da ritenersi equiprobabili in

mancanza di ragioni che permettano di assegnare probabilità. Ad esempio, se non ci sono motivi per affermare che un dado sia truccato, si accetta che ogni faccia sia equipossibile.

- Un altro tipo di difficoltà s'incontra nel calcolo del numero dei casi possibili e dei casi favorevoli quando i casi sono molto numerosi; tale calcolo è addirittura impossibile se si debbono valutare insiemi infiniti.
- Il campo di applicazione è ristretto ad un numero di limitato di problemi,perché la definizione è valida per eventi nei quali vi siano ragioni di simmetria che permettano di giudicare egualmente possibili i vari casi (come nel lancio di una moneta o di un dado non truccati, nell'estrazione dei numeri del lotto). Così per calcolare la probabilità di un evento del tipo :" il cavallo A vincerà la corsa" la definizione classica risulta inadeguata.

3.2. DEFINIZIONE FREQUENTISTA

Se indichiamo con v il numero delle volte che un esperimento ha avuto esito favorevole, verificando cioè un evento A, e con n il numero totale degli esperimenti effettuati ,

$$f_n = v/n$$

prende il nome di frequenza dell'evento A relativa alle n prove effettuate.

Per esempio, se lancio un dado 10 volte e l'evento A={esce 6} si presenta 4 volte, $f_n=4/10=2/5$.

Se il numero di prove effettuate è piccolo la frequenza è aleatoria, in quanto può cambiare notevolmente ripetendo lo stesso numero di prove una seconda volta. Se invece calcoliamo la frequenza su un numero elevato di prove, quest'ultima si stabilizza attorno ad un valore costante. Tale valore, si deduce sperimentalmente essere la probabilità dell'evento considerato. Vale infatti la **legge empirica del caso**:

In un gran numero di prove eseguite tutte nelle medesime condizioni, la frequenza relativa di un evento aleatorio si avvicina alla probabilità e l'approssimazione in generale migliora con l'aumentare del numero delle prove.

La legge empirica del caso permette di formulare la seguente definizione frequentista di probabilità per eventi ripetibili.

La probabilità di un evento è la frequenza relativa in un numero di prove ritenuto <<sufficientemente>> elevato.

Le tre proprietà fondamentali che abbiamo visto valere per la probabilità classica continuano a valere per la definizione frequentista. Infatti, dato lo spazio degli eventi Ω:

1. $\forall A \in \Omega,\ 0 \le P(A) \le 1$

   f,v ≥0, inoltre v≤n in quanto il numero dei casi in cui A ha avuto esito favorevole è sempre minore (al più uguale) al numero n di tutti gli esperimenti effettuati,
2. a)*P(Ω)=n/n=1,*

   in quanto rappresentando Ω la totalità degli eventi, è sempre verficato;

   b) *P(∅)=0/n=0;*

   poichè l'insieme vuoto è l'evento impossibile, non può mai essere verificato*;*
3. *Dati due eventi A e B, indipendenti:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La dimostrazione è simile a quella già presentata.

CRITICA ALLA CONCEZIONE FREQUENTISTA

Nel corso del XIX secolo quindi, proprio a causa delle critiche mosse alla concezione classica si assiste ad un grande progresso della concezione frequentista, dovuto in parte anche all'uso crescente che ne viene fatto in molte scienze sperimentali ed in molte attività pratiche. Il campo di applicazione della concezione frequentista è molto più vasto, in quanto la definizione può essere applicata a fenomeni dei quali si posseggano dati statistici riguardanti fenomeni passati che si sono verificati in condizioni analoghe. Ad esempio, si possono calcolare, per una data popolazione, la probabilità di morte o di sopravvivenza degli individui o la probabilità di nascita di maschi o di femmine. Si hanno pure importanti applicazioni nella medicina, nella psicologia, nell'economia, nella meccanica quantistica e, in generale, in tutte le scienze per le quali si possono utilizzare metodi statistici. Agli inizi del '900 quindi i frequentisti pongono la loro concezione alla base della teoria probabilista, in particolare tale sistematizzazione e formalizzazione dei risultati raggiunti è opera di R.Von Mises (1883-1953), tale matematico affronta anche le critiche mosse a questa concezione, in particolare:

- Sono esclusi dall'ambito della probabilità i casi singolari non ripetibili, ad esempio, come calcolare la probabilità dell'evento che "domani alle dieci piova", essendo l'evento evidentemente non ripetibile?Inoltre sono esclusi anche gli eventi mai realizzatesi: come calcolare la probabilità che nasca una zebra senza strisce?
- Una critica riguarda il concetto di ripetibilità: dato che le prove devono essere molto numerose, non abbiamo la certezza che le condizioni rimangano sempre uniformi!
- Ad esempio per calcolare la probabilità con cui il giocatore di pallacanestro fa centro nei tiri liberi non si può applicare tale definizione in quanto non si mantengono le stesse condizioni (cambia lo stato psico-fisico, cambiano le condizioni atmosferiche…).
- La definizione di probabilità parla di un numero sufficientemente elevato di prove ma in realtà In generale non si può dire quante prove siano necessarie, perché il numero delle prove dipende dal fenomeno in esame.

3.3. DEFINIZIONE SOGGETTIVISTA

La concezione frequentista domina il campo della probabilità fino ai primi decenni del XX secolo, quando comincia ad affermarsi l'impostazione soggettivista.

Supponiamo di trovarci alla vigilia della finale dei mondiali Italia-Brasile, e di voler puntare una determinata somma di denaro su una delle due squadre. Chi scegliere? Proviamo a ragionare in termini di probabilità.

Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento A "L'Italia vince contro il Brasile nella finale dei mondiali". Ragioniamo prima di tutto in termini di probabilità classica:

lo spazio degli eventi Ω={sconfitta, perdita, pareggio} mentre i casi favorevoli al verificarsi di E sono soltanto uno e cioè la vittoria, per cui P(A)=1/3.

C'è qualcosa che non va! Siete d'accordo?

Se invece ragionassimo in termini di probabilità frequentista dovremmo considerare i risultati delle partite in cui si sono scontrate le due squadre, eventi però accaduti in condizioni diverse e di sicuro non di probabilità costante.

Più decisivi per il risultato sono invece la preparazione atletica dei giocatori, lo spirito della squadra, le condizioni metereologiche…

Che somma scommettereste quindi?

La concezione soggettivista si sviluppa proprio come risposta agli evidenti limiti dell'approccio classico e frequentista emersi con l'applicazione delle teorie probabilistiche a campi nuovi quali ad esempio attività commerciali quali la gestione di imprese o le assicurazioni dove assumono un ruolo fondamentale le decisioni personali.

Definiamo quindi la **probabilità di un evento come la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, secondo le sue informazioni ed opinioni, al verificarsi dell'evento.**

Le valutazioni di probabilità sono soggettive, ossia possono variare da individuo a individuo, ma deve essere rispettata la coerenza. Per meglio fissare questo concetto e

per rendere operativa la definizione data, proponiamo un ulteriore esempio per poi arrivare alla definizione di De Finetti.

Consideriamo di nuovo l'evento E "L'Italia vince contro il Brasile nella finale dei mondiali". Supponiamo però di poter partecipare alla scommessa pagando una piccola tassa di iscrizione del valore di 1€. Certamente ne vale la pena dato che il premio finale consiste di ben 2000€ in caso di vittoria della squadra scelta, 0€ in caso contrario.

E se invece la tassa di iscrizione fosse raddoppiata? Lo stesso, per il premio in palio ne vale sicuramente la pena!

Supponiamo però che la tassa d'iscrizione salga fino a raggiungere i 1000€. Chi sarebbe disposto a pagarli? Sicuramente troveremmo pochi studenti così amanti del rischio. Quindi se la tassa è di 2€ partecipiamo, se è di 1000€ No. Ma quale è il valore che fa da spartiacque tra l'accettazione o il rifiuto di giocare? Tale valore T rappresenta la probabilità che lo scommettitore attribuisce all'evento.

A questo punto risulterà chiara la definizione di probabilità proposta da Bruno De Finetti:

Probabilità di un evento A è il prezzo equo che un individuo è disposto a pagare per ottenere una vincita unitaria al verificarsi dell'evento, nulla al verificarsi di A^c.

Con prezzo equo si intende il prezzo per cui l'individuo è disposto sia a fare la scommessa e, per coerenza, anche a riceverla. Ossia l'individuo è disposto a pagare una somma T per ricevere 1€ nel caso si verifichi A; ma, per coerenza, egli è anche disposto ad accettare la scommessa inversa, ossia a ricevere T e pagare 1€ al verificarsi di A.

Anche in questo caso si possono dedurre le principali proprietà della probabilità:

1. *dato un evento A,* $0 \leq P(A) \leq 1$.

Infatti, pagando $P(A)$ si riceve, per definizione, o 1 (con guadagno $1\text{-}P(A)$) o 0 (con guadagno $0\text{-}P(A)$).

2. a)*Dato* Ω *evento certo:* $P(\Omega)=1$.

Poiché Ω è evento certo, quando si verifica si riceve 1 e il guadagno è $1\text{-}P(\Omega)$ e questo non può essere né maggiore di 0 (perché si avrebbe guadagno certo) né minore di 0 (perché si avrebbe perdita certa) quindi $1\text{-}P(\Omega)=0$, $P(\Omega)=1$.

2. b)*Dato A impossibile:* $P(A)=0$.

Poiché A è evento impossibile, quando si verifica si riceve 0 e il guadagno è $0\text{-}P(A)$ e questo non può essere né maggiore di 0 (perché si avrebbe perdita certa) né minore di 0 (perché si avrebbe guadagno certo) quindi $-P(A)=0$, $P(A)=0$.

3. *Dati A e B eventi incompatibili:* $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

Siano $A_1, A_2, ... A_n$, eventi necessari (dove necessari significa che almeno uno dei due si deve verificare) e incompatibili.

Facciamo una scommessa su ciascuno di essi, consideriamo quindi $P(A_1), P(A_2) ... P(A_n)$. Poiché gli A_i sono incompatibili e necessari questo significa che almeno uno di essi si verifica certamente con una vincita unitaria e un guadagno certo pari a $1-(P(A_1)+ P(A_2)+...+ P(A_n))$.

D'altra parte le n scommesse corrispondono ad unica scommessa sull'evento, che si deve verificare e quindi il guadagno è nullo, per cui $1-(P(A_1)+ P(A_2)+...+ P(A_n))=0$, quindi $P(A_1)+ P(A_2)+...+ P(A_n)=1$.

Consideriamo gli eventi $A,B,(AUB)^c$, che sono necessari e incompatibili. Grazie al risultato appena ottenuto si ha che: $P(A)+P(B)+P(AUB)^c=1$.

Analogamente consideriamo gli eventi AUB e $(AUB)^c$ anch'essi necessari e incompatibili, per cui $P(AUB)+P(AUB)^c =1$, quindi $P(AUB)=1-(AUB)^c$.

Confrontando i due risultati ottenuti si ottiene che $P(AUB)=P(A)+P(B)$.

CRITICA ALLA CONCEZIONE SOGGETTIVISTA

- La critica più forte che viene mossa a questa definizione è che così facendo la probabilità viene ad essere fondata sull'opinione dei singoli e quindi varia da individuo ad individuo: ciò ha come conseguenza i fatto che i valori di probabilità così ottenuti abbiano scarso valore oggettivo. E questo sembra andare contro i criteri che guidano la ricerca soprattutto quella scientifica.
- Un'altra critica viene fatta al sistema delle scommesse coerenti, perché viene ignorato il comportamento differente e a volte imprevedibile che le persone hanno di fronte al rischio: la disponibilità economica o certi aspetti psicologici possono portare ad una valutazione sfalsata della probabilità.

3.4. DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITA'

Agli inizi del 900 si sentiva l'esigenza di sistematizzare in modo rigoroso queste diverse concezioni nel tentativo di costruire una teoria unificata della probabilità. Emblematico fu che al congresso di Parigi del 1900 il matematico Hilbert, presentando una lista dei problemi ancora aperti e di cui urgeva trovare una soluzione, inserisse al sesto posto l'assiomatizzazione della probabilità. In questo contesto la scelta degli assiomi da porre a fondamento dell'intera teoria accese un dibattito molto intenso tra le diverse correnti di pensiero che rivendicavano la propria concezione di probabilità come elemento fondante. Nel 1933 viene pubblicata l'opera di A.N.Kolmogorov "Foundation of the theory of probability" in cui l'autore si poneva volutamente al di sopra della parti con l'obiettivo di costruire una teoria della probabilità prescindendo dai diversi significati.

Possiamo ora introdurre gli assiomi che definiscono la probabilità, nel caso che Ω sia finito:

La funzione P definita su ogni evento A ∈ $\mathcal{A}$[1] e a valori reali (P:A→R) è una funzione di probabilità su Ω se soddisfa i seguenti assiomi:

[1] Sia dato un insieme Ω non vuoto e consideriamo $\mathcal{A}$ una famiglia di sottinsiemi di Ω. S dice che $\mathcal{A}$ è una **algebra** su Ω se e solo se valgono le seguenti proprietà:

P_1) P(A)$\geq$ 0

P_2) P(Ω)=1;

P_3) Se A e B sono incompatibili allora P(AUB)=P(A)+P(B).

Dagli assiomi discendono alcuni teoremi fondamentali:

1. $P(\emptyset)=0$;
2. se $A \in$ **A** allora $P(A)=1-P(A^c)$.
3. se A e $B \in$ **A** , $A \subset B$ allora $P(B \setminus A)=P(B)-P(A)$
   in particolare $P(A) < P(B)$.

4. se $A \in$ **A** allora $P(A) \leq 1$
5. se A e $B \in$ **A** risulta $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.
   Dimostrazione
   Scriviamo AUB e B come somme di eventi incompatibili:
   $AUB=AU(A^c \cap B)$
   $B=(A \cap B)U(A^c \cap B)$
   Per $\mathbf{P_3}$ $P(AUB)=P(A)+P(A^c \cap B) \Rightarrow P(A^c \cap B)= P(AUB)-P(A)$
   $P(B)=P(A \cap B)+P(A^c \cap B) \Rightarrow P(A^c \cap B)= P(B)-P(A \cap B)$
   Per la proprietà transitiva $P(AUB)-P(A)=P(B)-P(A \cap B)$ da cui
   $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.
6. $\forall$ A,B risulta: $P(AUB) \leq P(A)+P(B)$
   Dimostrazione
   La relazione segue facilmente dalla non negatività di P(A$\cap$B) e dal teorema 5.

7. Se gli eventi $A_1,A_2,A_3....A_n$ sono incompatibili a due a due, allora
   $$P(A_1 \, UA_2 \, UA_3 \, U....UA_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$$

   Dimostrazione

   La proprietà si dimostra applicando successivamente l'assioma $\mathbf{P_3}$.

---

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Se $\mathcal{A} \in \Omega$ allora $\mathcal{A}^c \in$ a Ω.
3. Se $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \Omega$ allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \Omega$.
4. Se $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \Omega$ allora $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \Omega$.

Con queste ipotesi si chiama evento casuale ogni elemento della famiglia $\mathcal{A}$ (campo di eventi).

Esercizi

1. Probabilità classica:Consideriamo l'estrazione al lotto sulla ruota di Napoli. Una volta definito lo spazio degli eventi calcola la probabilità dell'evento:
A="il numero estratto è 46"
B=" La seconda cifra (quella dell'unità) del numero estratto è 9"
C="Il numero non è maggiore di 50"
D="Il numero non ha due cifre uguali"

2. Probabilità frequentista: su 100000 individui, in base ai dati ISTAT è risultato che in media, 99467 raggiungono i quindici anni, 99306 raggiungono i vent'anni e 89978 i trent'anni. Calcola la probabilità dell'evento:
A=" un quindicenne sopravvive fino a trent'anni"
B="un vent'enne sopravvive fino ai trent'anni"

3. Probabilità soggetivista: supponiamo di acquistare un biglietto della lotteria alla sagra del paese. Il costo del biglietto è 15€ mentre il premio in palio è di 1000€. Calcolare la probabilità che, comprando il biglietto, attribuiamo all'evento:
A="vincere il primo premio".

4. Consideriamo il lancio di due dadi non truccati. Qual è la probabilità dell'evento A="la somma dei punteggi è un numero maggiore o uguale a 4 o multiplo di quattro?"

5. Consideriamo un gioco di simulazione di guerra in cui due giocatori a turno attaccano e difendono. Attaccante e difensore lanciano i dadi e vince chi ottiene il punteggio maggiore,mentre in caso di parità vince il difensore. Determina lo spazio degli eventi,costruisci quindi una tabella con i possibili esiti di ciascuna battaglia, calcola infine la probabilità dell'evento D="vince il difensore".

6. Un altro esempio di calcolo della probabilità (def.classica) è il problema della previsione del sesso di un nascituro. Un individuo è di sesso maschile se possiede una coppia di cromosomi XY, mentre è di sesso femminile se la coppia è XX. Ogni nuovo concepito eredita a caso in modo simmetrico un cromosoma di ogni coppia dal padre e dalla madre. Qual è lo spazio degli eventi? Calcola la probabilità dell'evento A="il nascituro è un femmina" facendo riferimento alle leggi della genetica qui riportate.

7. In riferimento all'esercizio precedente supponiamo di voler ragionare statisticamente. Qui di seguito sono riportate le statistiche ufficiali sulle nascite.

Anno	1986	1987	1988	1989	1990
Femmine Nate	279906	268563	277705	271485	274678
Totale nascituri	559029	555022	5731513	558992	566176

Calcola la probabilità P(A) stimandone come valutazione la frequenza relativa dell'evento A. Confrontando i risultati ottenuti nell'esercizio precedente cosa noti? Le due probabilità sono diverse?Se si a cosa è dovuta questa discrepanza?

8. Considera il seguente evento:
A="la pallina estratta da un urna è rossa".
Individua le ipotesi e i dati necessari che ti permettano di calcolare la probabilità dell'evento:
secondo la definizione classica;
secondo la definizione frequentista;
secondo la definizione soggettiva.
Quale delle tre rappresenta il modello più realistico?Quali limiti riscontrano le atre due?

9. Considera il seguente evento:
B="il cavallo Ethienne vince la corsa"
Individua le ipotesi e i dati necessari che ti permettano di calcolare la probabilità dell'evento:
secondo la definizione classica;
secondo la definizione frequentista;
secondo la definizione soggettiva.
Quale delle tre rappresenta il modello più realistico?Quali limiti riscontrano le altre due?

10. Associa a ciascun settore, giustificando la tua risposta, il modello probabilistico più adatto (perché più aderente alla realtà) a descrivere la probabilità di un evento:
giochi d'azzardo(carte, dadi);
mortalità in una popolazione;
scommesse;
estrazioni.

11. Si lancino contemporaneamente due monete. Qual è la probabilità che esca testa su entrambe? Rappresenta la soluzione attraverso un grafo ad albero.

4. LA PROBABILITA' CONDIZIONATA

Spesso si considerano eventi il cui verificarsi è condizionato a delle informazioni sullo spazio degli eventi elementari. La probabilità allora può essere modificata, in quanto, essendo noto che si è verificato l'evento B, la probabilità che si associa all'evento A non sarà necessariamente la stessa.

Se S è uno spazio campionario, $E \subset S$ è un evento con probabilità positiva, e A un qualunque evento, chiamiamo probabilità di A condizionata ad E il numero:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

(cioè ridefiniamo come spazio campionario l'evento E e riassegnamo le probabilità naturali).

Otteniamo così la regola del prodotto:
$P(A \cap E) = P(E) * P(A|E)$

Questa nuova funzione di insiemi è una funzione di probabilità in quanto rispetta gli assiomi della probabilità. Infatti, la funzione $P(A|E)$ è sempre non negativa per definizione e $P(S|E) = 1$ dato che

$$P(S|E) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \text{ .}$$

Il condizionamento è utile quando si vuole analizzare un certo evento A (l'evento condizionato) avendo a disposizione una certa informazione B (l'evento condizionante): l'evento A | B (detto A condizionatamente a B o A dato B) riguarda quindi l'analisi di A assumendo verificato l'evento condizionante (informazione) B. Si ricorda anche che l'espressione assumendo verificato non significa necessariamente che B si è verificato, ma solo che si ragiona come se si fosse verificato (cioè prendendo per buona l'informazione a disposizione). Abbiamo anche detto che il condizionamento degli eventi si risolve in pratica in una sorta di ridefinizione dello spazio campionario.

Infatti se si assume che B si è verificato ne consegue che:

1. perdono di rilevanza tutti i punti campionari che non appartengono a B, cosicché B diviene "una specie" di nuovo evento certo;
2. perdono di rilevanza tutti i punti campionari di A che non appartengono a B, cosicché l'unica parte di A che ancora può verificarsi è soltanto A ∩ B.

5. EVENTI INDIPENDENTI

Nel caso in cui la probabilità condizionata non sia diversa dalla probabilità non condizionata, vale a dire quando la probabilità di verificarsi di un evento A non viene modificata dalla conoscenza di un altro evento B si dice che gli eventi sono stocasticamente indipendenti.

$P(A|B) = P(A)$
Da cui $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

6. PROBABILITA' TOTALI

Supponiamo di aver scomposto lo spazio campionario S in K eventi incompatibili a due a due:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$$

Prendiamo S "studente iscritto al corso di informatica", consideriamo S_1 "studente che frequenta regolarmente il corso" e S_2 "studente che non frequenta il corso" (in questo caso, K è uguale a 2).

Sia ora A un qualunque evento.

Ad esempio A “esame superato”.

Abbiamo $A = A \cap S = (A \cap S_1) \cup (A \cap S_2) \cup ... \cup (A \cap S_k)$

Con gli $A \cap S_i$ incompatibili a due a due, pertanto:

$P(A) = P(A \cap S_1) + P(A \cap S_2) + ... + P(A \cap S_k)$

Nel nostro caso $A = A \cap S = (A \cap S_1) \cup (A \cap S_2)$

$P(A) = P(A \cap S_1) + P(A \cap S_2)$

Ossia uno studente può superare l’esame sia frequentando che non frequentando il corso, naturalmente con probabilità diverse…

Ora per la regola del prodotto, $P(A \cap E) = P(E) * P(A|E)$, pertanto:

$P(A) = P(S_1)P(A|S_1) + P(S_2)P(A|S_2)$

In generale, la regola delle probabilità totali è:

$P(A) = P(S_1)P(A|S_1) + ... + P(S_k)P(A|S_k)$

Che ci dice che la probabilità di un evento è la media pesata delle probabilità dell’evento condizionante agli eventi di una partizione.

La probabilità di superare l'esame di Informatica se le lezioni non vengono seguite regolarmente è 0.26, mentre se le lezioni vengono seguite regolarmente è 0.72 . Se il 62% degli studenti ha superato l'esame in questione, qual è la proporzione che ha seguito regolarmente le lezioni?

7. FORMULA DI BAYES

Sia $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$ con gli S_i incompatibili a due a due e sia A un evento.

Abbiamo

$$P(S_i | A) = \frac{P(S_i \cap A)}{P(A)}$$

Ma

$P(S_i \cap A) = P(S_i)P(A \mid S_i)$

Pertanto

$$P(S_i \mid A) = \frac{P(S_i)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_i})}{P(A)}$$

E dalla formula delle probabilità totali scende la regola di Bayes:

$$P(S_i \mid A) = \frac{P(S_i)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_i})}{P(S_1)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_1}) + P(S_2)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_2}) + ... + P(S_k)\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_k})}$$

Per ogni i (i=1,2,…,k)

Questa formula ammette la seguente lettura: la probabilità finale (o a posteriori) dell'evento S_i (causa i-esima) subordinatamente all'evidenza A, si esprime in termini delle probabilità iniziali (o a priori) degli S_i e delle probabilità condizionate (verosimiglianze) di A dato S_i. Più operativamente ci dice che se le cause S_i incompatibili, possono produrre l'effetto A con probabilità $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{S_i})$, allora la constatazione che A si è verificato induce una variazione nella probabilità inizialmente attribuita a S_i, che passa da $P(S_i)$ a $P(S_i \mid A)$.

Esercizi

1. Supponiamo di estrarre una carta da un mazzo di 40 e di scommettere che sia un asso. Che probabilità ho di vincere la scommessa? Un amico, dall'altra parte del tavolo, ci assicura che la carta no è una figura. Come cambia la probabilità di vincere la scommessa?

2. Nel lancio di un dado regolare si considerino gli eventi:
   A = uscita di una faccia con punteggio ≤ 4;
   B = uscita di una faccia con punteggio ≤ 4;
   C = uscita di una faccia con punteggio pari.
   I tre eventi sono fra loro indipendenti?

3. Siano A, B, C tre persone impegnate in un gioco d'azzardo. Se la probabilità di vittoria di A è 2/5 della probabilità di vittoria di B che a sua volta è 5/12 della probabilità di vittoria di C, determinare le probabilità di vittoria nell'ipotesi in cui il gioco debba per forza concludersi con la vittoria di uno dei tre.

4. Una persona lancia due dadi non truccati. Qual è la probabilità dell'evento A= "la somma dei punteggi è 7"dato che si è verificato:
   B="la somma dei puntegi è dispari"
   C="la soma dei punteggi è un numero maggiore di 6"
   D="l'esito del primo dado è un numero dispari"
   E="l'esito del secondo dado è dispari"
   F="l'esito di uno dei due dadi è dispari"
   G="i due dadi hanno lo stesso esito"
   H="i due dadi hanno esiti diversi"

5. Una classe è formata da 10 maschi e 5 femmine. Si scelgano a caso tre studenti. Qual è la probabilità che:
   - i primi due siano maschi e il terzo femmina;
   - il primo e il terzo maschi e il secondo femmina;
   - il primo e il terzo dello stesso sesso e il secondo di sesso diverso.

6. Si supponga che 5 uomini su 100 e 25 donne su 10.000 siano daltonici. Si sceglie a caso una persona e si nota che è daltonica. Qual è la probabilità che sia femmina? (Si consideri l'ipotesi che maschi e femmine siano in ugual numero).

7. Si consideri un'urna contenente 14 palline, 4 delle quali sono bianche. Si lanci un dado e si estraggano dall'urna tante palline quante indicate dal dado. Trovare la probabilità che tutte le palline estratte siano bianche.

8. Da un mazzo di carte da scopa (40 carte), si estrae una carta. Che probabilità c'è che sia un "re"? Se vengo a sapere che la carta estratta è una figura, che valutazione darò della probabilità che si tratti di un "re"?

9. Si estraggono, successivamente, e senza reimbussolamento, 2 palline da un'urna che contiene 3 Nere e 2 Rosse. Se la prima estratta è R, che probabilità sussiste che la seconda sia pure R? Prima di estrarre la prima pallina, come avremmo valutato la probabilità che, alla fine della prova, la seconda estratta risultasse una Rossa?

10. Si lancia un dado due volte. Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10, ammesso che uno di questi punti sia 6? Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10, ammesso che il punto ottenuto col primo lancio sia 6? Qual è la probabilità che la somma dei punti fatti sia maggiore di 10, ammesso che il punto ottenuto col secondo lancio sia 6?

11. In una certa gara le probabilità di vincere dei quattro concorrenti A, B, C, D sono state valutate rispettivamente in: 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 (Qui sconfiniamo piuttosto in una concezione "soggettivistica" della probabilità: è ovvio che non si sono considerati "casi favorevoli" e "casi possibili", ma si è cercato di quantificare, con ragionamenti e confronti, le possibilità di ciascun concorrente di vincere quella gara. Insomma, si è concluso che le capacità e le condizioni fisiche e psicologiche dei concorrenti sembrano tali da equiparare la gara ad un'estrazione di una pallina da un'urna contenente 10 palline, di cui 1 reca il simbolo "A", 2 recano il simbolo "B", 3 il simbolo "C" e 4 il simbolo "D". Ora, se il concorrente D si ritira, come verranno ricalcolate le probabilità di A, B, C?

8. ATTIVITA’

SCHEDA 1	**“calcolo delle probabilità applicato al gioco del lotto”**
PREREQUISITI: Definizione di probabilità Calcolo combinatorio	

Qual è la probabilità di azzeccare l' "estratto semplice"?

Qual è la probabilità di azzeccare l' "ambo" ?

Qual è la probabilità di azzeccare il "terno" ?

Qual è la probabilità di azzeccare la "quaterna"?

Qual è la probabilità di azzeccare la "cinquina"?

Notare come il lotto sia un **gioco “iniquo”**: a fronte delle probabilità sopra calcolate, lo Stato restituisce soltanto:
per l' "estratto semplice": 11,232 volte la cifra giocata;
per l'ambo, 250 volte,
per il terno 4250 volte,
per la quaterna 80000 volte,
per la cinquina 1000000 di volte.

Come dunque “ha senso” giocare al lotto?

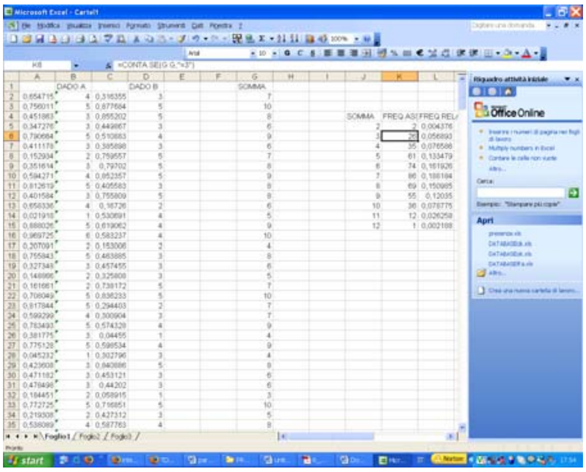
SCHEDA 2	“Lancio di dati: simulazione con excel”

PREREQUISITI:

Definizione frequentista di probabilità

Conoscenza del foglio elettronico

Costruire un foglio elettronico che riporti sulle colonne B e D le uscite dei due dadi (utilizzando in maniera opportuna la funzione casuale). Calcolare la somma e, utilizzando la funzione conta.se (), calcolare frequenze assolute e relative.



Simuliamo un numero elevato di lanci, ad esempio 400, e osserviamo il grafico delle frequenze che si viene ad ottenere.

I casi centrali sono più frequenti: da cosa dipende?

Valutiamo le probabilità dei diversi eventi; I casi possibili nel lancio di due dadi sono tutte le coppie che si possono ottenere associando una faccia del primo dado con una qualunque faccia del secondo dado, quindi sono ……………...

Completare la seguente tabella:

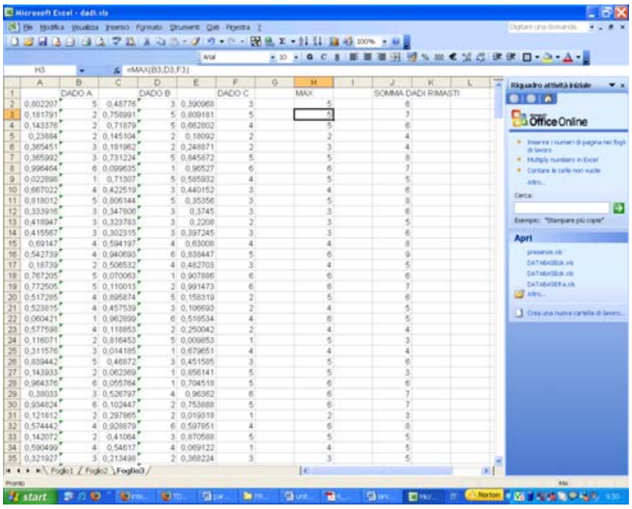
EVENTO	**MODALITA' DI PRESENTAZIONE**	**NUMERO CASI POSSIBILI**	**PROBABILITA'**
uscita del due	1+1	1	1/36
uscita del tre	1+2 2+1	2	2/36
uscita del quattro	1+3 2+2 3+1	3	
uscita del cinque			
uscita del sei			
uscita del sette			
uscita dell’ otto			
uscita del nove			
uscita del dieci			
uscita dell’ undici			
uscita del dodici			
Totale		36	

Perché il grafico sperimentale non risulta perfettamente simmetrico come ci si aspetterebbe dalla valutazione di probabilità?

Il grafico avrebbe avuto un andamento più vicino alle previsioni se il numero di lanci fosse stato maggiore?

Si può concludere che su un gran numero di prove ci si può attendere di avere frequenze di uscita sempre più vicine alla probabilità?

Lanciamo ora tre dadi, scartiamo quello che mostra il valore maggiore e sommiamo i restanti. Utilizziamo la funzione Max()



Costruiamo la tabella delle frequenze relative e osserviamo il grafico.

Confrontiamo ad esempio l'evento "esce il 2" e l'evento "esce il 12": non hanno (come prima) la stessa probabilità!

In quali modi si realizza l'evento "esce il 2"?

1 1 ~~1~~

1 1 ~~2~~ in tre modi

……………

……………

In quali modi si realizza l'evento "esce il 12"?

I casi possibili sono ora …………...

Calcolare le probabilità dei diversi eventi.

SCHEDA 3	**"Il dilemma di Monthy Hall"**

PREREQUISITI:

Definizione di probabilità

Questo quesito è noto come il dilemma di "Monty Hall" perché fu proposto agli ospiti di un celebre gioco a premi televisivo americano "Let's make a deal", il cui conduttore era appunto Monty Hall, e suscitò una accesa controversia sulla rivista "Parade" nel 1990.

Ci sono tre contenitori A, B, C e in uno solo di essi il gestore del gioco pone un oggetto. Chiede ad uno dei presenti di provare ad indovinare dove sta l'oggetto.

Sia data ad esempio la seguente situazione iniziale:

A	B	C
Vuoto	Oggetto	Vuoto

Il giocatore sceglie ad esempio A, ma non lo apre.

Il gestore apre il rimanente contenitore vuoto C e lo mostra al giocatore.

A questo punto il gestore propone tre metodi per proseguire:

a) il giocatore mantiene sempre la scelta fatta inizialmente;

b) il giocatore cambia sempre la scelta ed indica il rimanente contenitore chiuso;

c) il giocatore sceglie nuovamente a caso uno fra i due contenitori rimasti.

Cosa fareste?

Il problema può essere risolto applicando la definizione classica di probabilità:

Probabilità di un evento = Num. casi favorevoli / Num. casi possibili

P = Nf / Np

.

Probabilità di indovinare con la strategia a)? 1/3

Non dobbiamo farci fuorviare dal fatto che il gestore, DOPO LA SCELTA DEL GIOCATORE, apre una scatola. Di fatto una scatola su tre contiene l'oggetto, il giocatore ha scelto una scatola e quindi la probabilità è 1/3.

Probabilità di indovinare con la strategia b)? 2/3

Attenzione! Con questa strategia il giocatore NON RISCEGLIE A CASO fra le due scatole rimanenti ma CAMBIA SEMPRE LA SCATOLA.

La probabilità che l'oggetto sia in una delle due scatole NON scelte è 2/3.

Visto che il gestore rivela quale delle due è vuota, la probabilità che l'oggetto sia nell'altra è per l'appunto 2/3.

Cambiando scatola è come se il giocatore avesse scelto DUE scatole, anziché UNA.

Probabilità di indovinare con la strategia c)? 1/2

Dopo che il gestore ha mostrato una scatola vuota è evidente che l'oggetto si trova in una delle altre due. Dunque RISCEGLIEDONE una a caso, la probabilità di indovinare è 1/2.

SCHEDA 4	"I Mondiali di calcio"
PREREQUISITI: Probabilità condizionata	

Torniamo all'anno scorso… e ripensiamo ai mondiali.

Le squadre iscritte erano 32 quindi, secondo la definizione frequentista, quale era la probabilità che l'Italia vincesse i mondiali (stimandola a giugno)?

Ora immaginiamo di "vedere" in anticipo lo schema delle partite degli ottavi: l'Italia compare tra le squadre elencate… come cambia ora la probabilità di vincere i mondiali?

OTTAVI	QUARTI	SEMIFINALE	FINALE
Germania			
Svezia			
Argentina			
Messico			
Italia			
Australia			
Svizzera			
Ucraina			
Inghilterra			
Ecuador			
Portogallo			
Paesi Bassi			
Brasile			
Ghana			
Spagna			
Francia			

Nel primo caso siamo in assenza di ulteriori informazioni, dovremo stimare la probabilità come casi favorevoli (1) / casi possibili (numero di squadre).

Negli altri casi ci viene fornita una informazione in più…

Qual è la probabilità che l'Italia vinca i mondiali, **sapendo che** giocherà gli ottavi?

La probabilità sarà sempre nella forma casi favorevoli / casi possibili, ma ora andiamo a **ridefinire** lo spazio degli eventi possibili secondo la nostra informazione.

A="L'Italia vincerà i mondiali"

E="L'italia giocherà gli ottavi di finale"

$$P(A|E) = \frac{n°elementi(A \cap E)}{n°elementi(E)}$$

n° elementi di E = numero di squadre che giocheranno gli ottavi

Quindi la probabilità che l'Italia vinca i mondiali sapendo che giocherà gli ottavi è:

E se avessimo (sempre a giugno) l'informazione che l'Italia senz'altro giocherà i quarti di finale?

SCHEDA 5	**"Il sofisma del giurato"**
PREREQUISITI:	

SOFISMA DEL GIURATO

Siete membro di una giuria popolare. Un tassista è accusato di aver investito un passante in una notte tempestosa, e di essere poi fuggito senza prestare aiuto. Il pubblico ministero, nel richiedere la condanna dell'imputato, basa tutto sulla testimonianza di una anziana signora che dalla sua finestra, a una certa distanza, ha visto l'incidente. La signora afferma di aver visto investire il malcapitato da un taxi blu, e di aver poi visto fuggire il taxi. L'imputato lavora in una compagnia di taxi che possiede solo macchine blu. Nel corso dell'istruttoria e del dibattito processuale è emerso quanto segue :

1) *in quella città operano due sole compagnie di taxi, una che ha tutte le vetture verdi, e una che ha tutte le vetture blu. Di tutti i taxi circolanti quella notte circa l'85% erano verdi e circa il 15% erano blu;*
2) *la signora, testimone a carico, sulla base di ripetute prove di acutezza visiva, effetuate dal giudice istruttore in condizioni di illuminazione molto simili a quelle della notte dell'incidente, ha dimostrato di saper correttamente identificare un taxi blu, rispetto ad uno verde, 80 volte su 100.*

Sulla base della testimonianza giurata della signora, e sulla base dei dati 1) e 2), qual è la probabilità che il taxi fosse veramente blu?

Che interpretazione possiamo dare alle probabilità del problema?

Indichiamo con B = "il taxi era blu", e TB = "la teste ha visto un taxi blu" e rappresentiamo il problema con uno schema ad albero.

Conosciamo:

p (V), p (B)
p (TV|V), p (TV|B), p (TB|B), p (TB|V)

e vogliamo determinare:

p(BT|B)

Tenendo conto della legge del prodotto, si può determinare:

$$P(B \mid TB) = \frac{P(B) \cdot P(TB \mid B)}{P(TB)}$$

Ma come calcoliamo P (TB)?

Riflettendo sullo schema ad albero, si può determinare l'evento TB a partire dagli eventi rappresentati. Si può riconoscere che: $TB = (V \cap TB) \cup (B \cap TB)$

E quindi a determinare $P(TB) = P(V) \cdot P(TB \mid V) + P(B) \cdot P(TB \mid B)$

Sostituendo questa espressione nella formula trovata prima, otteniamo:

$$P(B \mid TB) = \frac{P(B) \cdot P(TB \mid B)}{P(V) \cdot P(TB \mid V) + P(B) \cdot P(TB \mid B)}$$

che rappresenta la legge di Bayes nel caso più semplice: quello di due sole ipotesi alternative. Questa formula ha consentito di risolvere il problema iniziale, e quindi di ottenere che la probabilità cercata è
p (B|TB) =